

FRAÇÕES CONTÍNUAS E APROXIMAÇÕES DE FUNÇÕES. Manuella Aparecida Felix de Lima, Eliana Xavier Linhares de Andrade. – Matemática – Bacharelado em Matemática Aplicada - Departamento de Ciências de Computação e Estatística - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - Campus de São José do Rio Preto.

Muitas das funções especiais que ocorrem em aplicações da Matemática são definidas por processos infinitos, tais como, séries, integrais, iterações. A fração contínua é um desses processos.

Definição 1: Uma fração contínua é uma expressão da forma

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \ddots}}}$$

que também podemos denotar por

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n} + \dots,$$

onde a_i, b_i são reais ou complexos.

Definição 2: Consideremos a seqüência $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\begin{aligned} C_0 &= a_0 \\ C_1 &= a_0 + \frac{b_1}{a_1} \\ C_2 &= a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} \\ &\vdots \\ C_n &= a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n} \\ &\vdots \end{aligned}$$

C_n é o n-ésimo convergente da fração contínua definida acima.

A fração contínua

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} - \frac{x/2}{1} + \frac{x/6}{1} - \frac{x/2}{1} + \frac{x/10}{1} - \dots \quad (2.1)$$

é uma expansão da função exponencial. Euler obteve uma outra expansão

$$e^x = 0 + \frac{1}{1} + \frac{-2x}{2+x} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{10} + \frac{x^2}{14} + \dots \quad (2.2)$$

Os convergentes dessa fração contínua são funções racionais que podem aproximar valores de e^x .

Podemos, por exemplo, aproximar $e^{-1} = 0.367879441171\dots$ através dos convergentes de (2.2). Comparando com os valores obtidos pela série de Taylor:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (2.3)$$

com $x = -1$, obtemos os seguintes valores:

Nº de termos	Convergentes	Taylor
1	0	1
2	1	0
3	<u>0.3333333333</u>	0.5000000000
4	<u>0.3684210526</u>	<u>0.3333333333</u>
5	<u>0.3678756477</u>	<u>0.3750000000</u>
6	<u>0.3678794561</u>	<u>0.3666666667</u>

Outra expansão para a função e^x é

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} - \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x}{5} - \frac{x}{2} + \frac{x}{7} - \dots \quad (2.4)$$

Definição 3: Dizemos que uma fração contínua corresponde a uma série de potências se os convergentes de ordem n da fração contínua, quando expandidos em série de potências, coincidem com os $n + 1$ primeiros termos da série.

Por exemplo, a fração contínua (2.1) corresponde à série (2.3), pois,

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{q_0} &= \frac{1}{1} = 1 \\ \frac{p_1}{q_1} &= 1 + \frac{x}{1} = 1 + x \\ \frac{p_2}{q_2} &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \dots \\ \frac{p_3}{q_3} &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{18}x^4 + \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Fazendo a aproximação de e^{-1} através dos convergentes de (2.1) e (2.4) assim como foi feito para (2.2) e comparando com a série de Taylor temos

Nº de termos	Convergentes (2.1)	Convergentes (2.4)	Taylor
1	1	1	1
2	0	1	0
3	<u>0.3333333333</u>	<u>0.3333333333</u>	0.5000000000
4	<u>0.352941176</u>	<u>0.3750000000</u>	<u>0.3333333333</u>
5	<u>0.351351351</u>	<u>0.368421052</u>	<u>0.3750000000</u>

Percebemos que mesmo convergindo mais lentamente do que (2.2), as frações contínuas (2.1) e (2.4) ainda convergem mais rapidamente do que a série de Taylor.

Para calcular a expansão de uma função em fração contínua, podemos utilizar substituições sucessivas. Seja f uma função. Calculamos $T_1, T_2, \dots, T_{n+1}, \dots$, tais que

$$\begin{aligned} f &= a_0 + T_1 \\ T_1 &= \frac{b_1}{a_1 + T_2} \\ T_2 &= \frac{b_2}{a_2 + T_3} \\ &\vdots \\ T_i &= \frac{b_i}{a_i + T_{i+1}}, \quad 2 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

onde b_0, a_i, b_i são escolhidos arbitrariamente e podem ser funções dos argumentos de f . Deste modo, temos que

$$f = a_0 + T_1 = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + T_2} = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \dots + \frac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n + T_{n+1}}}}}.$$

Continuando esse processo de substituições sucessivas, obtemos a fração contínua. Utilizando esse processo obtemos a seguinte expansão para a função $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1 + \frac{x/2}{1 + \frac{x/6}{1 + \frac{x/3}{1 + \dots}}}} \quad (2.5)$$

Calculando as aproximações de $\ln(1.5) = 0.4054651\dots$ através dos convergentes de (2.5) e da série de Taylor da função $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

obtemos os seguintes resultados fazendo $x = 0.5$

Nº de termos	Convergentes	Taylor
1	0.5	0.5
2	<u>0.400000</u>	0.375000
3	<u>0.406250</u>	<u>0.416666</u>
4	<u>0.405405</u>	<u>0.401041</u>

Um outro exemplo de expansão de funções em frações contínuas, devido a Lambert, é o seguinte:

$$tg^{-1}(x) = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 + \frac{4x^2}{5 + \frac{9x^2}{7 + \frac{16x^2}{9 + \dots}}}}}, \quad |x| < 1. \quad (2.6)$$

Essa equação é definida por meio de

$$tg^{-1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n(x), \quad |x| < 1. \quad (2.7)$$

Se considerarmos que a equação é válida, obtemos, então, um método alternativo para calcular valores da função $tg^{-1}(x)$. Se o método é prático, depende de quão rapidamente a equação (2.7) acima irá convergir. Para verificarmos isto numericamente, vamos calcular o valor de $tg^{-1}(1/\sqrt{3}) = \pi/6 \approx 0.5235987756$ usando a sequência $C_n(1/\sqrt{3})$ para $n \geq 2$ e comparar com os valores obtidos pela série de Taylor para a função $tg^{-1}(x)$, dada por

$$tg^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (2.8)$$

Fazendo $x = 1/\sqrt{3}$ em (2.6) e em (2.8), obtemos os seguintes valores:

Nº de termos	Convergentes	Taylor
1	<u>0.577350269</u>	<u>0.577350269</u>
2	<u>0.519615242</u>	<u>0.513200239</u>
3	<u>0.523891910</u>	<u>0.526030245</u>
4	<u>0.523577450</u>	<u>0.522975481</u>
5	<u>0.523600319</u>	<u>0.523767457</u>
6	<u>0.523598903</u>	<u>0.523551464</u>

Esta tabela mostra que obtivemos seis casas decimais de precisão no sexto convergente e apenas quatro na série de Taylor com seis termos. Daremos, agora, um outro procedimento pelo qual uma fração contínua pode ser obtida a partir de uma série.

Teorema 1: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x_k} = \frac{1}{x_1 - \frac{x_1^2}{x_1 + x_2 - \frac{x_2^2}{x_2 + x_3 - \dots - \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1} + x_n - \dots}}}}$

Referências Bibliográficas

- [1] Andrade, E.X.L. e Bracciali, C.F., Frações Contínuas: propriedades e aplicações, Série Notas em Matemática Aplicada, Vol. 20, Ed. SBMAC (2005).
- [2] Khovanskii, A.N., The Application of Continued Fractions and their Generalizations to Problems in Approximation Theory, Noordhoff Groningen (1963).

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.